

2014 年全国硕士研究生数学真题及答案解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:11 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

(A) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x, y) dx =$ ()

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(4) 若 $\int_{\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b} \left\{ \int_{\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则

$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$ ()

(A) $2 \sin x$ (B) $2 \cos x$ (C) $2\pi \sin x$ (D) $2\pi \cos x$

(20)(本题满分 11 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系; (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21)(本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数且大于 0.

令 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题答案

跨考数学教研室

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

- (1) B
- (2) D
- (3) D
- (4) B
- (5) B
- (6) A
- (7) (B)
- (8) (D)

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

- (9) $2x - y - z - 1 = 0$
- (10) $f(-1) = 1$
- (11) $\ln \frac{y}{x} = 2x + 1$
- (12) π
- (13) $[-2, 2]$
- (14) $\frac{2}{5n}$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

(15) 【答案】

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1) \int_1^x t^2 dt - \int_1^x t dt}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e-1) - x$$

$$\text{令 } u = \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e-1) - x$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1 - u}{u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{2u} = \frac{1}{2}$$

(16) 【答案】

$$3y^2y' + y^2 + x \cdot 2yy' + 2xy' + x^2y' = 0$$

$$y^2 + 2xy = 0$$

$$y(y + 2x) = 0$$

$$y = 0 \text{ (舍) 或 } y = -2x.$$

$$y = -2x \text{ 时,}$$

$$y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$$

$$-8x^3 + x \cdot (4x^2) + x^2 \cdot (-2x) + 6 = 0$$

$$-8x^3 + 4x^3 - 2x^3 + 6 = 0$$

$$-6x^3 + 6 = 0$$

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, y = -2$$

$$6(y')^2y + 3y^2y'' + 2yy' + 2y'y + x \cdot 2(y')^2 + x \cdot 2yy'' + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 0$$

$$12y''(1) - 4y''(1) - 4 + y''(1) = 0$$

$$9y''(1) = 4$$

$$y''(1) = \frac{4}{9} > 0$$

所以 $y(1) = -2$ 为极小值。

(17) 【答案】

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= f'(e^x \cos y) e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= f''(e^x \cos y) e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) e^x \cos y \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= f'(e^x \cos y) e^x (-\sin y) \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= f''(e^x \cos y) e^{2x} \sin^2 y + f'(e^x \cos y) e^x (-\cos y) \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= f''(e^x \cos y) e^{2x} = (4E + e^x \cos y) e^{2x} \\ f''(e^x \cos y) &= 4f'(e^x \cos y) + e^x \cos y\end{aligned}$$

令 $e^x \cos y = u$,

则 $f''(u) = 4f'(u) + u$,

故 $f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{u}{4}$, (C_1, C_2 为任意常数)

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 得

$$f(u) = \frac{e^{2u}}{16} - \frac{e^{-2u}}{16} - \frac{u}{4}$$

(18) 【答案】

补 $\Sigma_1: \{(x, y, z) | z = 1\}$ 的下侧, 使之与 Σ 围成闭合的区域 Ω ,

$$\begin{aligned}& \iint_{\Sigma+\Sigma_1} -\iint_{\Sigma} \\ &= -\iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1] dx dy dz \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^1 [3(\rho \cos \theta - 1)^2 + 3(\rho \sin \theta - 1)^2 + 1] \rho dz \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^1 [3\rho^2 - 6\rho^2 \cos \theta - 6\rho^2 \sin \theta + 7\rho] dz \\ &= -2\pi \int_0^1 (3\rho^2 + 7\rho)(1 - \rho^2) d\rho = -4\pi\end{aligned}$$

(19) 【答案】

(1) 证 $\{a_n\}$ 单调

由 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, 根据单调有界必有极限定理, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

故由 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 两边取极限 (令 $n \rightarrow \infty$), 得 $\cos a - a = \cos 0 = 1$.

解得 $a = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(20) 【答案】 ① $(-1, 2, 3, 1)^T$ ② $B = \begin{pmatrix} -k_1 + 2 & -k_2 + 6 & -k_3 - 1 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 3 & 2k_3 + 1 \\ 3k_1 - 1 & 3k_2 - 4 & 3k_3 + 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} (k_1, k_2, k_3 \in R)$

(21) 【答案】 利用相似对角化的充要条件证明.

(22) 【答案】 (1) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}y\right), & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$

(2) $\frac{3}{4}$

(23) 【答案】 (1) $EX = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}, EX^2 = \theta$

(2) $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

(3) 存在



育路教育
YULU.COM
育路考研网

考研人的学习俱乐部
考研资讯|历年真题|考研辅导



O2O教育咨询平台

长按二维码关注