

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的.

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) \cdot f'(x) > 0$, 则 ()

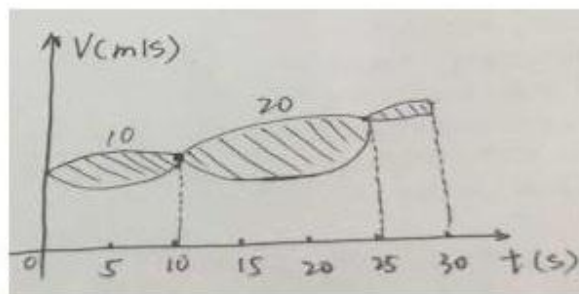
- (A) $f(1) > f(-1)$ (B) $f(1) < f(-1)$
(C) $|f(1)| > |f(-1)|$ (D) $|f(1)| < |f(-1)|$

(3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $u = (1, 2, 2)$ 的方向导数为 ()

- (A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 2

(4) 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20,

3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则



- (A) $t_0 = 10$ (B) $15 < t_0 < 20$ (C) $t_0 = 25$ (D) $t_0 > 25$

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ()

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆

1

- (C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似 (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似 (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(7) 设 A, B 为随机概率, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是

()

- (A) $P(B|A) > P(B|\bar{A})$ (B) $P(B|A) < P(B|\bar{A})$

- (C) $P(\bar{B}|A) > P(\bar{B}|\bar{A})$ (D) $P(\bar{B}|A) < P(\bar{B}|\bar{A})$

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 则下列结论正确的是 ()

- (A) $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布 (B) $2(x_n - x_1)^2$ 服从 χ^2 分布

- (C) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

(10) 微分方程 $y' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{x\dot{x} - ay\dot{y}}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2,$

$A\alpha_3$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

(16) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f'(x) + (f'(x))^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

(19) (本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 ρ . 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M .

(20) (本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P(Y \leq EY)$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23) (本题满分 11 分)

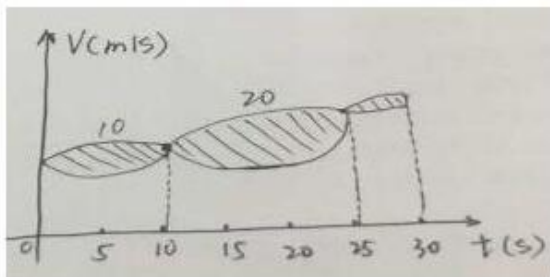
某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的, 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计 σ .

(I) 求 Z_i 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则



- (A) $t_0 = 10$ (B) $15 < t_0 < 20$ (C) $t_0 = 25$ (D) $t_0 > 25$

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则 ()

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆
1
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似 (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似 (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的.

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 ()

- (A) $ab = \frac{1}{2}$ (B) $ab = -\frac{1}{2}$ (C) $ab = 0$ (D) $ab = 2$

(2) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) \cdot f'(x) > 0$, 则 ()

