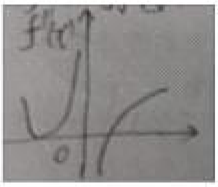
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

一、选择题:1□ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线

$y=f(x)$ 的拐点的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



【答案】(C)

【解析】拐点出现在二阶导数等于 0，或二阶导数不存在的点，并且在这点的左右两侧二阶导函数异号。因此，由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点.故选（C）.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解，则 ( )

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

【答案】(A)

【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数，此类题有两种解法，一种是将特解代入原方程，然后比较等式两边的系数可得待估系数值，另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解，也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知，$\frac{1}{2}e^{2x}$、$-\frac{1}{3}e^x$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以 2,1 为特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的根，从而 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times 2=2$，从而原方程变为 $y''-3y'+2y=ce^x$，再将特解 $y=xe^x$ 代入得 $c=-1$.故选（A）

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的（　）

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

【答案】(B)

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间，幂级数的性质.

【解析】因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，即 $x=2$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的条件收敛点，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间为 $(0,2)$.而幂级数逐项求导不改变收敛区间，故 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛区间还是 $(0,2)$.因而 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛点，发散点.故选（B）.

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（　）

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

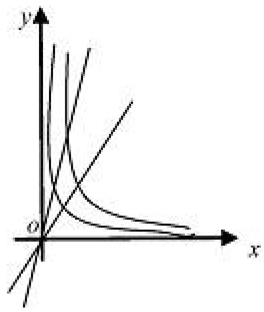
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

【答案】(B)

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出 D 的图形，



所以$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，故选（B）

(5) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$Ax=b$有无穷多解的充分必要条件为（　）

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$
(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$
(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$
(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由$r(A)=r(A,b)<3$，故$a=1$或$a=2$，同时$d=1$或$d=2$。故选（D）

(6)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ ，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ ，若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ ，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为（　）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$$

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则 ( )

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB\subset A, AB\subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$，

从而 $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，选(C) .

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$ ( )

(A) -3　　(B) 3　　(C) -5　　(D) 5

【答案】(D)

【解析】 $E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)$

$$=D(X)+E^2(X)+E(X)\cdot E(Y)-2E(X)$$

$=3+2^2+2\times1-2\times2=5$，选(D)．

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________．

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【分析】此题考查$\dfrac{0}{0}$型未定式极限，可直接用洛必达法则，也可以用等价无穷小替换.

【解析】方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\tan x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$ ________．

【答案】$\dfrac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\dfrac{\pi^2}{4}$.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________．

【答案】$-dx$

【分析】此题考查隐函数求导.

【解析】令 $F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$$F_x'(x,y,z)=yz+1-\sin x, F_y'=xz, F_z'(x,y,z)=e^z+xy$$

又当 $x=0,y=1$ 时 $e^z=1$，即 $z=0$.

所以$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-\frac{F_x'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=-1,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-\frac{F_y'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=0$，因而$\left.dz\right|_{(0,1)}=-dx$.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ __________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算，可直接计算，也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】由轮换对称性，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$.所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2dz=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{4}.$$

(13) n阶行列式$\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$ ____________.

【答案】$2^{n+1}-2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\&&\cdots&&\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2$$

$$=2^{n+1}-2$$

(14)设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ _________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知， $X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，而且 X、Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}.$

【解析】法一：原式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{kx^3}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o(x^3)}{kx^3}=1$$

即 $1+a=0,b-\frac{a}{2}=0,\frac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

法二： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$$

因为分子的极限为 0，则 $a=-1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1$$，分子的极限为 0，$b=-\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1$$，$k=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】$f(x)=\dfrac{8}{4-x}$.

【解析】设 $f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

令 $y=0$，得到 $x=-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0$，

故由题意，$\frac{1}{2}f(x_0)\cdot(x_0-x)=4$，即 $\frac{1}{2}f(x_0)\cdot\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4$，可以转化为一阶微分方程，

即 $y'=\dfrac{y^2}{8}$，可分离变量得到通解为：$\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+C$，

已知 $y(0)=2$，得到 $C=\dfrac{1}{2}$，因此 $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}$；

即 $f(x)=\dfrac{8}{-x+4}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为 $f(x,y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'(x,y)=1+y, f_y'(x,y)=1+x$，

故 $gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，模为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，

此题目转化为对函数 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对 $d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数： $F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

$$\begin{cases}F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\ F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0\\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$，得到 $M_1(1,1),M_2(-1,-1),M_3(2,-1),M_4(-1,2)$.

$d(M_1)=8,d(M_2)=0,d(M_3)=9,d(M_4)=9$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3$.

(18)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x), v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（II）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】（I） $[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

（II）由题意得

$$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为$B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分$I=\int_L\left(y+z\right)dx+\left(z^2-x^2+y\right)dy+(x^2+y^2)dz$.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \\ z=\cos\theta \end{cases}$ $\theta:\dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20)（本题满 11 分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$内$R^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$为$R^3$的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量ξ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$下的坐标相同，并求所有的$\xi$.

【答案】

【解析】(I)证明：

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+\left(k+1\right)\alpha_3\right)$$
$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2k & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基.

（II）由题意知，

$$\xi = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \xi \neq 0$$

即

$$k_1(\beta_1 - \alpha_1) + k_2(\beta_2 - \alpha_2) + k_3(\beta_3 - \alpha_3) = 0, \quad k_i \neq 0, i = 1,2,3$$

$$k_1(2\alpha_1 + 2k\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(2\alpha_2 - \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + (k+1)\alpha_3 - \alpha_3) = 0$$

$k_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + k_2(\alpha_2) + k_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = 0$有非零解

即$|\alpha_1 + 2k\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + k\alpha_3| = 0$

即$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0$，得 k=0

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_1 = 0$$

$$\therefore k_2 = 0, k_1 + k_3 = 0$$

$$\xi = k_1\alpha_1 - k_1\alpha_3, k_1 \neq 0$$

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（I）求a,b的值；

（II）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵. .

【解析】（I）$A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$\therefore \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$

(II)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T; \xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测，直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.
(I) 求 Y 的概率分布;
(II) 求 EY

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布;

(II) $E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^{n}]$

记 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot x^{n-1})'=(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n})''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1}x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量；

(II) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，

(II) $E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^{n}]$

记 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot x^{n-1})'=(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n})''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1}x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量；

(II) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，

当$\theta \le x_i \le 1$时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n$，则$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$.

从而$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}$，关于$\theta$单调增加，

所以$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$为$\theta$的最大似然估计量.