张宇 2012 年考研数学试题分析

与 2013 年考研数学试题展望与复习指导

主讲人　张 宇

张宇博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，,全球可持续发展大会受邀专家并发表主旨演讲（2007，斯洛文尼亚），高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》、《考研数学命题人 8 套卷》总主编，北京、上海等全国著名考研辅导班首席主讲。

【注】（1）由于工作原因，本人暂时不便到各大网站去做视频访谈，我已经请几位老师代我转达对全国同学们的问候。后面我会在讲座中给大家详谈。（2）这份稿子是我的同事们协助我制作的（包括视频截图），对他们的辛勤工作表示感谢！（3）时间原因，主要以高等数学的考题为例来说明。

2012 年 1 月 8 日，终于见到了 2012 年考研数学的庐山真面。我给大家谈三个方面。以下所谈，2012 的同学主要是看难度分析和分数预测，2013 的同学们，你们应该一字一句的认真读。

今年的考卷，像我在考前说的一样，吸取 2011 年“难度控制”的成功经验，继续保持“中等难度”，整张试卷没有真正的难题。但是明显的，计算量增加了，如果考生计算能力不强，很有可能做不完，提醒 2013 的考生注意。2012 的同学们，我说的最后几个月，每天坚持做题不少于 3 小时，你体会到了吗？给学弟学妹们说出你们真实的经验。

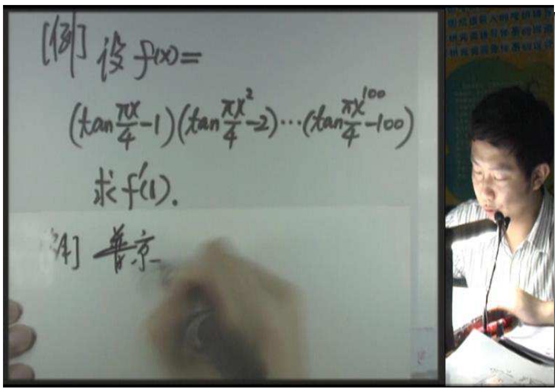
一张试卷上，说白了，两种题，新颖题和传统题，一个是“题源”，从来没出过；一个是“旧题”，常考常新。

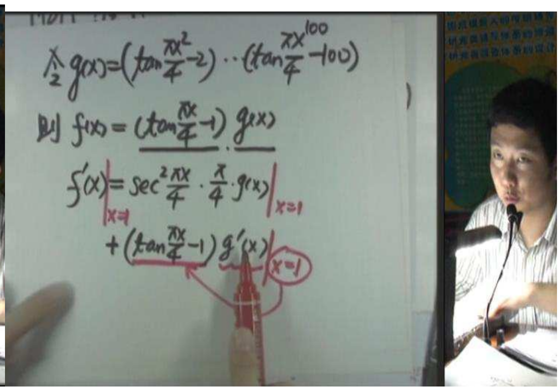
（1）我们坚持搞“题源”，这几年，每年试卷上都有一些“新颖题”（考研试卷上没出过的题目形式），而每每都在我们的复习过程中重点讲：比如下面这个题。今天考的一个题（数学一二三的共用考题）：

【考】设 $f(x)=\left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)$，求 $f'(0)$

暑假上课讲的一个重点题（我们戏称普京出的 2012 年的“抓主要矛盾”题）：

【例】设 $f(x)=\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1\right)\left(\tan\dfrac{\pi x^{2}}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\dfrac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$，求 $f'(1)$





本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘，如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值，都比较麻烦。本题希望考生发现，当把 $x=1$ 代入每个因式后，只有第一项 $\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)$=0，而其余所有项都不等于 0，抓住第一项这个“特立独行”的主要矛盾，则

记 $g(x)=\left(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100\right)$，于是 $f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot g(x)$.

$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}\Big|_{x=1}\cdot g(1)=-\frac{\pi\cdot 100!}{2}$.

下面来解考研这个实考题，【考】设 $f(x)=\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)$，求 $f'(0)$

【答案解析】本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘，如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值，都比较麻烦。本题希望考生发现，当把 $x=0$ 代入每个因式后，只有第一项 $\left(e^x-1\right)$=0，而其余所有项都不等于 0，抓住第一项这个“特立独行”的主要矛盾，则

记 $g(x)=\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)$，于是 $f(x)=\left(e^x-1\right)\cdot g(x)$·

$f'(0)=e^x g(x)\big|_{x=0}+\left(e^x-1\right)g'(x)\big|_{x=0}=(-1)^{n-1}n!$·

【注】当然，本题比我暑假班所给题目简单一点的是，本题函数形式简单，用导数定义法配合极限计算也可以做出来，但是我仍然希望考生们抓住“主要矛盾”思想，这个题更多的是希望给 2013 年的学生们以启发。

2012 全国所有的模拟卷里，也只有我们的模拟题里出现了这个题，做过的同学应该看到了：

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

（9）设 $f(x)=\prod_{n=1}^{2012}(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n)$，则 $f'(1)=$________

【答案与解析】正确答案填 $-\frac{\pi\cdot(2011)!}{2}$

还有一些新题，后面再说。

（2）我们坚持搞“基础”，考研数学一定是重点内容重点考，所有大的考点都不会是偏题，看看下面的几段分析。

首先，同事告诉我，今年又碰到了几个原题。

【例题 1】数学二的最后一个高数大题（最难）是我们的习题集里的原题，请同学们看看。

【考题】（除了区间，全都一模一样）

94. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n, n=2,3,\cdots$.

(1)证明方程 $f_n(x)=1$ 在$[0,+\infty)$有唯一实根 x_n；

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【例题 2】考题：

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2, y_1<y_2$.　　(B) $x_1>x_2, y_1>y_1$.

(C) $x_1<x_2, y_1<y_2$.　　(D) $x_1<x_2, y_1>y_2$.

对照： 139 页，例题 1 原题

9.2 关于基本概念的典型例题分析

【例 1】设在全平面上有 $f'_x(x,y)<0$，$f'_y(x,y)>0$，则下列四个条件中，使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是(　　)

(A)$x_1<x_2,y_1<y_2$　(B)$x_1<x_2,y_1>y_2$　(C)$x_1>x_2,y_1<y_2$　(D)$x_1>x_2,y_1>y_2$

【解】多元函数偏导数在某区域上的正负是不能直接决定该函数在这个区域上的增减性的，也就是说，我们不能从偏导数值的正负直接确定两个不同的点的函数值 $f(x_1,y_1)$，$f(x_2,y_2)$ 的大小关系. 解决问题的关键是找到一个桥梁，把 $f(x_1,y_1)$，$f(x_2,y_2)$ 联系起来：

(1) 用 $f(x_2,y_1)$ 作过渡，即 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$；

(2) 用 $f(x_1,y_2)$ 作过渡，即 $f(x_1,y_1)<f(x_1,y_2)<f(x_2,y_2)$.

【例题 3】考题：

(10) $\lim\limits_{x\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(10)填 $\dfrac{\pi}{4}$

对照： 99 页，例题

"凑定积分定义"的步骤如下：

①先提出 $\dfrac{1}{n}$；

②再凑出 $\dfrac{i}{n}$；

③由于 $\dfrac{i}{n}=0+\dfrac{1-0}{n}i$，故 $\dfrac{i}{n}$ 可以读作"0 到 1 上的 x"，

且 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-0}{n}$，读作"0 到 1 上的 $\mathrm{d}x$"，

于是，"凑定义"成功！

先看一个例子. 请计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+4}+\dfrac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)$.

【解】$I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+4}+\dfrac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n+i}{n^2+i^2}$

$$\overset{①}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2+ni}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{②}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{③}{=}\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

【例题 4】考题：

(12)微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解

(12)填 $x=y^2$

$$ydx+(x-3y^L)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x$$

对照 175 页，例题

【例】 求 $y\mathrm{d}x=(1+x\ln y)x\mathrm{d}y$ 的通解.

【解】 方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y}x^2$，这是以 y 为自变量，x 为未知函数的伯努利方程（大家试着以 x 为自变量，y 为未知函数来解方程，是极其困难的，所以当我们遇到困难时，要学会“换位思考”—— x 与 y，谁作为自变量，谁作为未知函数是可以互换的！）.

①两边同时除以 x^2，并令 $z=x^{-1}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，于是方程化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}z=-\frac{\ln y}{y}$；

②假设 $p=\frac{1}{y}$，$\int p\,\mathrm{d}y=\ln y$，代入求解公式，得

$$\frac{1}{x}=e^{-\ln y}\left(\int-\frac{\ln y}{y}e^{\ln y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y}[y(1-\ln y)+C]$$

故通解为 $\frac{1}{x}=1-\ln y+\frac{C}{y}$.

一、数学一与数学二三的本质区别：线面积分

首先说一句：2012 数学一的同学，咱们考前说的，不可能不出大题的，对吧？线面积分第一选择：大线小面，还记得吗？大题考第二型曲线积分，小题考面积分，很多人都说这个难，咱们看看考题，是不是就是简单的投影法（小题的面积分）和大题的补线法格林公式（或者化定积分也可以）。我一再说，在这部分把基本题搞清楚，不要放弃。提醒 2013 的同学们，不要放弃任何一部分，事实证明，一定要抓住大的考点。这两个题 4 分+11 分=15 分，整张试卷的 10%的分数！

二、下面来看看我们的“狗的理论”

数学三（15）（本题满分 10 分）计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【分析与解答】送分题，**你看，就是考 $\boxed{e^{\text{狗}}-1}$，毛主席说：没有条件，创造条件，立即在分子上提出 $e^{2-2\cos x}$！** 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2-2\cos x}\left(e^{x^2-2+2\cos x}-1\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$，搞定了，下面用泰勒公式还是洛必达随你了，还是泰勒公式好吧？

我们的 $\boxed{\text{狗}-\sin\text{狗}}$ 呢？在数学二的（15）题吧，你看是不是？跑不掉它，每年必考！

三、不等式证明问题

（共用考题）（18）（本题满分 10 分）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【分析与解答】送分题，我说了，不等式证明，咱们辅导书也好，习题集也好，**都有专门一**

章写这个吧，你说这不是讲了多少遍，做了多少遍的东西？这里哪有思路障碍，就是个求导，就是考你的计算能力。

四、多元函数的极值最值问题

看看数学一的（16）题，（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$ **的极值。**

看看我们模考题里的（17）（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ **的极值。**

【答案与解析】本题考查多元函数微分学的应用—求多元函数的无条件极值。这是考研的重要考点，属于基础计算题。

是不是又是重点内容重点考？我考前一天晚上还告诉大家，别忘了Δ判别法！

(3)分数线预测（预测而已，供 2012 的同学有个参考）

A 区：数学一二：60 分左右（58-62 分）

数学三：85 分左右（83-87 分）

自主划线：数学一二：最低 80，最高 90

数学三：就是 90