（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：（1） $P(X=2Y)$；

（2） $\operatorname{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

（1） $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（2） $\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$ ， 其 中

$E \quad =\frac{2}{3}, \quad {}^{2} \quad X \quad =1 \quad E^{2}\ (\frac{5}{3},)^{2} \quad = \ - \ X$

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},EXY=\frac{2}{3}$

所以， $\operatorname{cov}(X,Y)=0$， $\operatorname{cov}(Y,Y)=DY=\frac{2}{3}$， $\operatorname{cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3},\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 10 分）

设 随 机 变 量 X 和 Y 相 互 独 立 ， 且 均 服 从 参 数 为 1 的 指 数 分 布 ， $V=\min(X,Y),U=\max(X,Y)$.

求（1）随机变量V 的概率密度；

（2） $E(U+V)$.

【解析】:

（1） X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ X 和 Y 同分布.

由 $V=\min(X,Y)$，$F_V(v)=P\{V\le v\}=P\{\min(X,Y)\le v\}=1-P\{X>v,Y>v\}$，

而 X,Y 独立，故上式等于 $1-P\{X>v\}P\{Y>v\}=1-[1-F(v)]^2=\begin{cases}1-e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

故 $f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（2）同理，U 的概率密度为：$f_U(u)=\begin{cases}2(1-e^{-u})e^{-u}, & u>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$EU=\int_0^{+\infty}u2(1-e^{-u})e^{-u}du=\frac{3}{2}$，$EV=\int_0^{+\infty}v2e^{-2v}dv=\frac{1}{2}$，

所以 $E(U+V)=E(U)+E(V)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.